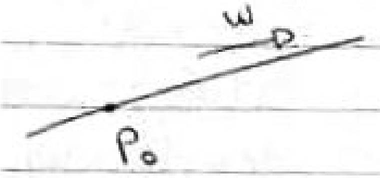
10/10/19

Παραδείγματα καμπυλών

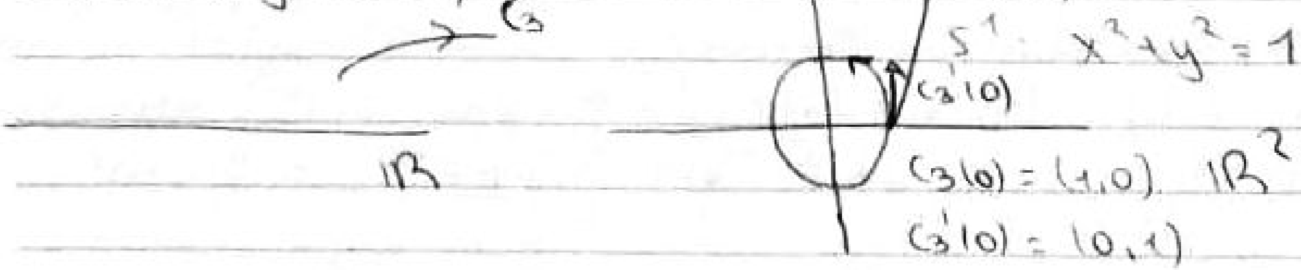
→ Δίνεται $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ και διάνυσμα $w\neq 0$. Ορίζω την καμπύλη $c_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με $c_1(t)=P_0+tw$. Η c_1 είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c_1'(t)=w\neq 0$. Η εικόνα της c_1 είναι η ευθεία



Η c_1 είναι κανονική.

→ Θεωρώ την καμπύλη $c_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c_2(t)=P_0+t^3w$. Είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c_2'(t)=3t^2w$.
$c_2'(0)=0 \Rightarrow$ Η c_2 δεν είναι κανονική. Η εικόνα της είναι $c_2(\mathbb{R})=c_1(\mathbb{R})$

→ Θεωρώ την καμπύλη $c_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.
$c_3(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$. Η c_3 είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c_3'(t)=(-\sin t,\cos t)$
$\|c_3'(t)\|=1\quad \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ Η c_3 είναι κανονική.
$c_3(t)=(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t)$
$x^2(t)+y^2(t)=1$



$\rightarrow c_4(t) = (\overset{x}{\cos 2t}, \overset{y}{\sin 2t}), t \in \mathbb{R}$

$c_4'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t)$

$\|c_4'(t)\| = 2 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Η c_4 είναι κανονική

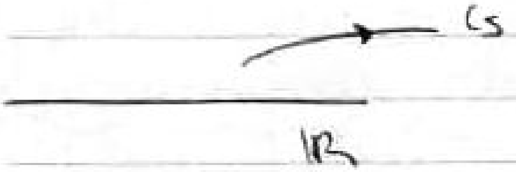
$c_4(0) = (1,0) = c_3(0)$

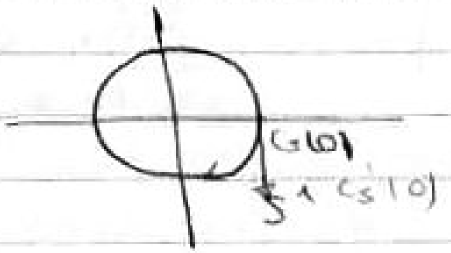
$c_4'(0) = (0,2) = 2c_3'(0)$

$\rightarrow c_5(t) = (\cos t, -\sin t)$

$c_5'(t) = (-\sin t, -\cos t)$

$\|c_5'(t)\| = 1 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Η c_5 είναι κανονική





$c_5(0) = (1,1)$

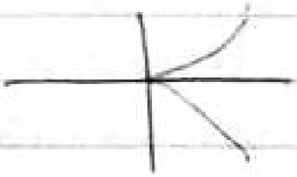
$c_5'(0) = (0,-1) \qquad c_5(t) = c_3(-t)$

$\rightarrow c_6(t) = (\cos t^2, \sin t^2) = c_3(t^2)$

$c_6'(t) = (-2t\sin t, 2t\cos t^2) \quad , c_6'(0) = 0 \Rightarrow$ Η c_6 <u>δεν</u> είναι κανονική

<u>Παραβολή του Neil</u> $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (2t, 3t^2)$

$c'(0) = (0,0) \Rightarrow$ Η c <u>δεν</u> είναι κανονική

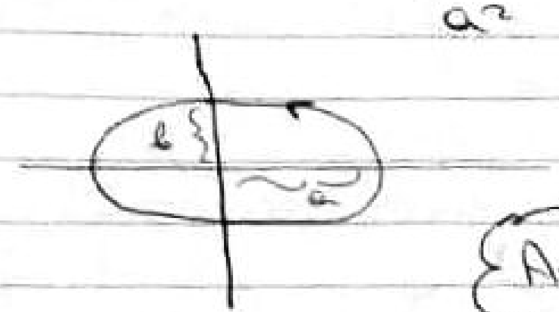


→ $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=(a\cos t, b\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$

$a, b>0$

$c'(t)=(-a\sin t, b\cos t)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} > 0 \Rightarrow$ Η c είναι κανονική $\qquad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$c(t+2k\pi)=c(t)$, $k\in\mathbb{Z}$

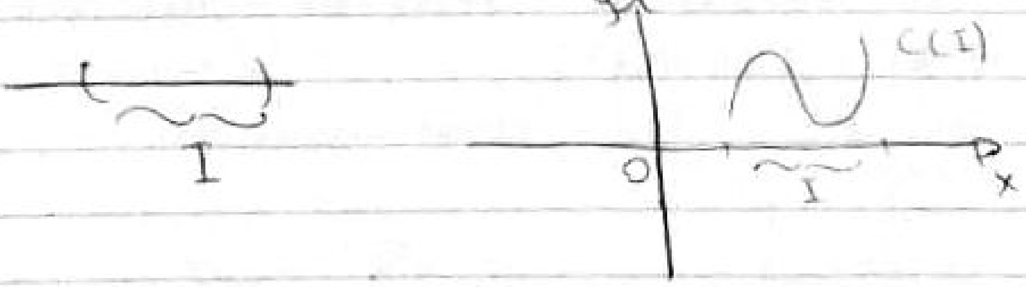
Αν $a=b$, θα είχα σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα

Καμπύλες γραφήματα

Θεωρώ λεία συνάρτηση $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Ορίζω την καμπύλη $c: I\to\mathbb{R}$ με $c(t)=(t, f(t))$, $t\in I$. Είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t)=(1, f'(t))\neq(0,0)$ $\forall t\in I$

Άρα η c είναι κανονική

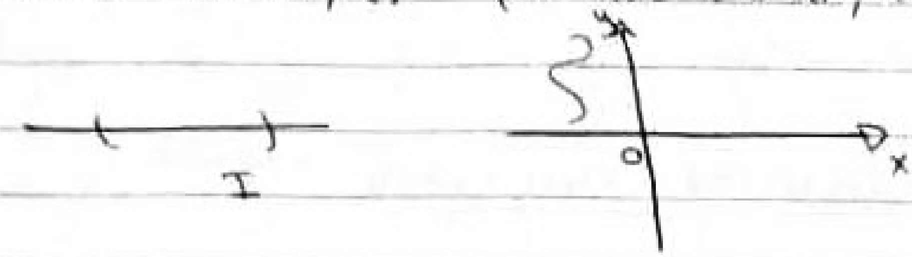
$c(I)=\{(t, f(t)) \mid t\in I\}$



Δηλαδή $c(I)$ = γράφημα της συν/ς f ως προς τον άξονα Ox

Γραφήματα ως προς τον άξονα Oy

$c(t) = (f(t), t)$, $c'(t) = (f'(t), 1) \neq (0,0)$



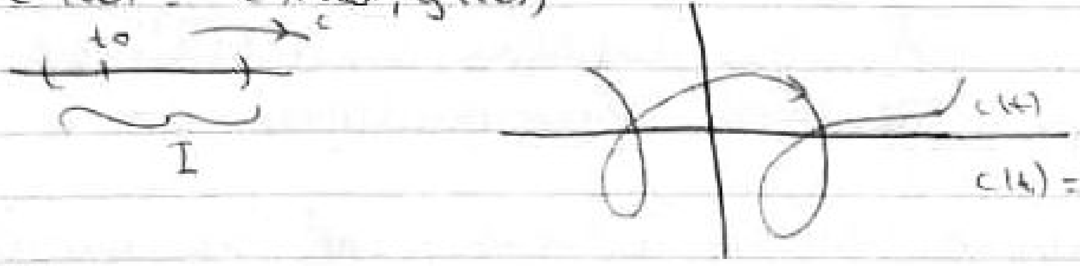
! Η προβολή ως προς τον Oy είναι 1-1

<u>Πρόταση</u>: Κάθε κανονική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ είναι <u>τοπικά γράφημα</u> είτε ως προς τον άξονα Ox είτε ως προς τον Oy κατά συνέπεια τοπικά δεν έχει αυτοτομές

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$. Θεωρώ $t_0 \in I$

$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$



$c(t) = (x(t), y(t))$

Υποθέτω ότι $x'(t_0) \neq 0$. Λόγω της $x'(t)$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό ώστε $x'(t) \neq 0 \ \forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$

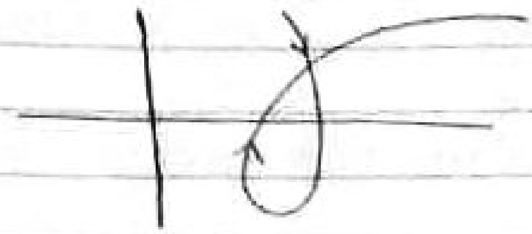
δηλ. $x'(t) > 0 \ \forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$

ή $x'(t) < 0 \ \forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$

Άρα η συνάρτηση $x = x(t)$ με C^1 αντίστροφο $t = t(x)$

$c(t) = (x(t), y(t)) = (x, y(t(x))) = (x, f(x))$

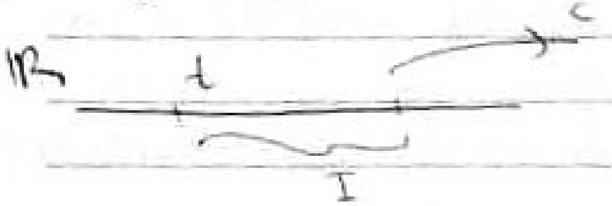
→ $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

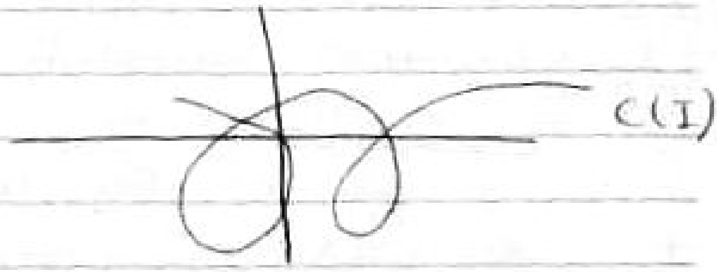


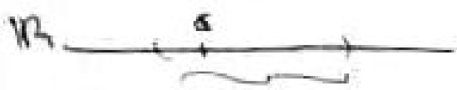
$P_0 = c(t_1) = c(t_1+\varepsilon)$

Αναπαραμέτρηση καμπυλών

Έστω ότι $c: I \to \mathbb{R}^2$ είναι λεία καμπύλη με παράμετρο $t \in I$







Θεωρώ λεία συνάρτηση $f: J \to I$ 1-1 και επί

$t = f(s)$. Η λεία καμπύλη $\tilde{c}: J \to \mathbb{R}^2$ με $\tilde{c} = c \circ f$ καλείται αναπαραμέτρηση της c

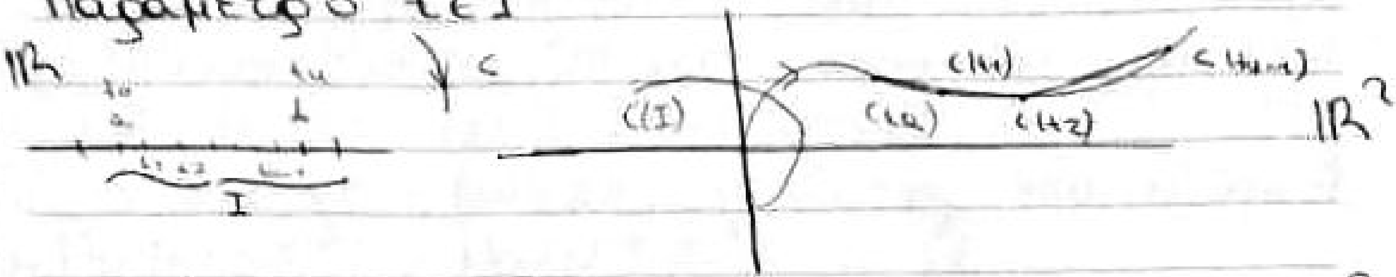
Παρατήρηση: Οι $c, \tilde{c}$ έχουν την ίδια εικόνα

$$\tilde{c}' = \frac{d\tilde{c}}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \quad \text{ή} \quad \boxed{\tilde{c}' = \frac{df}{ds} c'}$$

Συμπέρασμα: Έστω ότι η c είναι κανονική. Τότε η αναπαραμετρική της $\tilde{c} = c \circ f$ είναι κανονική αν $\frac{df}{ds} > 0$ παντού ή $\frac{df}{ds} < 0$ παντού

Μήκος καμπύλης

Θεωρώ μια C^1 καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο $t \in I$



Θεωρώ διαμέριση $P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$
Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής
$c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_{n-1}), c(t_n)$ είναι ίσο με
$\sum_{i=1}^{n} \| c(t_i) - c(t_{i-1}) \| = L(c, P)$

$|P| = \max\{ t_i - t_{i-1} / i = 1, \dots, n \}$

Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων P_n του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n \to \infty} |P_n| = 0$. Μήκος της c από το a έως το b είναι ο αριθμός $\lim_{n \to \infty} L(c, P_n)$

Θεώρημα: Αν $c: I \to \mathbb{R}$ είναι C^1 καμπύλη τότε το ανώτερο όριο υπάρχει, είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας διαμερίσεων και ισούται με $\int_a^b \| c'(t) \| dt$

Το μήκος της καμπύλης καλείται αναπαραμέτρηση της c από το a έως το b είναι ο αριθμός
$L_a^b(c) = \int_a^b \| c'(t) \| dt$

$\| c'(t) \| = \sqrt{\langle c'(t), c'(t) \rangle}$

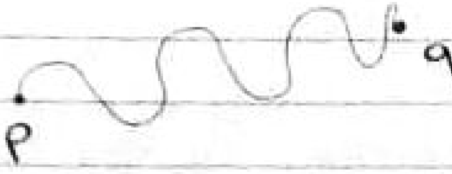
Ερώτημα: Είναι το μήκος γεωμετρική έννοια?
(δηλαδή αναλλοίωτο κάτω από ισομετρίες)

Απάντηση:
Έστω $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$, $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$
$T = T_v \circ A$ ισχύει ότι $\tilde{c}'(t) = A c'(t) \Rightarrow$
A ορθ. μετασχ. $\Rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|A c'(t)\| = \|c'(t)\|$

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|\tilde{c}'(t)\| dt = \int_a^b \|c'(t)\| dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_a^b(\tilde{c}) = L_a^b(c)$$

Πρόβλημα: Δίνονται σημεία $p \neq q$. Μεταξύ όλων των καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ με άκρα p, q υπάρχει καμπύλη που να έχει το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων αυτών?



Θεώρημα Έστω $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη με άκρα $c(a) = p$ και $c(b) = q$. Τότε ισχύει $L_a^b(c) \geq d(p,q)$. Η ισότητα ισχύει αν η c είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα p, q

Απόδειξη:
Θεωρώ το διάνυσμα $w = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, $d(p,q) = \|q-p\|$

Από C-S έχω $|\langle c'(t), w \rangle| \leq \|c'(t)\|$, $\forall t \in [a,b]$

$\boxed{\text{Αν } v_1, v_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ λεία τότε } \langle v_1, v_2 \rangle \text{ είναι λεία} \quad \langle v_1, v_2 \rangle' = \langle v_1', v_2 \rangle + \langle v_1, v_2' \rangle}$

$$\langle c(t), w \rangle' = \langle c(t), w \rangle \leq |\langle c'(t), w \rangle| \leq \|c'(t)\| \quad \forall t \in [a,b]$$

Συμπλήρωμα: $\int_a^b (\langle c(t), w \rangle)' dt \le \dots \le \int_a^b \|c'(t)\| dt =$

$= L_a^b(c)$

$\int_a^b (\langle c(t), w \rangle)' dt = \langle c(b), w \rangle - \langle c(a), w \rangle =$

$= \langle c(b) - c(a), w \rangle = \langle q - p, \frac{q-p}{\|q-p\|} \rangle =$

$= \frac{\langle q-p, q-p \rangle}{\|q-p\|} = \frac{\|q-p\|^2}{\|q-p\|} = \|q-p\| = d(p,q)$

Αν ισχύει $L_a^b(c) = d(p,q)$ τότε έχω:

$\langle c'(t), w \rangle = \| \langle c'(t), w \rangle \| = \|c'(t)\| \ \forall t \in [a,b]$

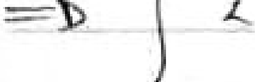
$\Rightarrow \left. \begin{cases} \langle c'(t), w \rangle \ge 0 \ \ \forall t \in [a,b] \\ c'(t), w \ \ \text{γ.ε.} \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c'(t) = f(t) w \\ f(t) \ge 0 \end{array}$

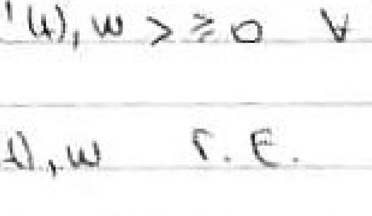
$\Rightarrow \int_a^t c'(s) ds = \left(\int_a^t f(s) ds \right) w \Rightarrow c(t) - c(a) = g(t) w$

$\Rightarrow c(t) = p + g(t) w$

Συνάρτηση μήκους τόξου

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ C^1 καμπύλη. Επιλέγω $t_0 \in I$





$c(I)$ Ορισμός: Η συνάρτηση $s: I \to \mathbb{R}$ με $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds$ καλείται μήκος τόξου της c με αφετηρία t_0

$$\boxed{L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(s)\| ds, \ a < b}$$

Αν $t_0 < t$, τότε: $s(t) = L_{t_0}^{t}(c)$

$\frac{ds}{dt}(t) = \| c'(t) \|$. Αν η c είναι κανονική, τότε: $\frac{ds}{dt}(t) = \| c'(t) \| > 0 \Rightarrow$ η

συνάρτηση $s = s(t)$ είναι $\nearrow \xrightarrow[\text{συνεχής}]{\text{Θ. αντίστροφης}}$ αντιστρέφεται

και η αντίστροφη $t = t(s)$ είναι C^1 καμπύλη
$t = f(s)$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\| c' \|} > 0$$